Une résolution plane d'une équation du troisième degré
Bombelli ALGEBRA[1]

Dans ce chapitre, en écho à la décomposition d'un cube sur lequel s'appuie la résolution des équations du troisième degré, Bombelli démontre comment on peut résoudre, en s'appuyant sur un raisonnement dans le plan, une équation du troisième degré de la forme $x^3 = Px + Q$. De manière « matérielle », il s'agit de déplacer convenablement deux équerres pour « lire » ensuite une solution de l'équation.

Traduction	Aide à la lecture
Démonstration du *Cube* égal aux *Tanti*[2] et *nombre* par les aires planes Soit $1\overset{3}{\smile}$ égal à $6\overset{1}{\smile}$ plus 4 et soit *.q.* l'unité. Tracer *.m.e.* et faire *.m.l.* qui soit égal à *.q.*, c'est-à-dire qui soit 1, et *.l.f.* 6, c'est à dire autant que le nombre d'inconnues (*Tanti*). Sur *.l.f.*, on construit un rectangle tel que son aire soit 4, c'est-à-dire autant que le nombre, ce sera le rectangle *.a.b.f.*. Ensuite prolonger *.a.b.* jusqu'en *.d.* et *.a.l.* jusqu'en *.r.*, puis ayant deux équerres, on en pose une avec l'angle sur la ligne *.r.e.* de sorte que l'un des bras touche l'extrémité *.m.*. Cette équerre s'élève ou s'abaisse jusqu'à ce qu'on puisse tracer une ligne à partir de l'angle de l'équerre passant par l'extrémité *.f.* qui va toucher *.b.d.* en un endroit tel qu'en mettant une autre équerre avec l'angle en ce point de contact et avec l'un des bras sur *.d.a.*, elle va croiser le bras de l'autre équerre sur la ligne passant par *.f.*. Ceci étant fait, je dis que la ligne qui va du point *.l.* jusqu'à l'angle de l'équerre est la valeur du *Tanto* et je le prouve de la manière qui suit. Je suppose qu'on a élevé ou abaissé l'équerre jusqu'en *.i.* je trace *.i.f.* jusqu'à *.c.* et que le bras de l'équerre *.p.* coupe l'autre équerre en *.g.* sur la ligne *.g.e.*. Ceci fait, je dis que la ligne *.l.i.* est la valeur du *Tanto* parce que *.l.i.* étant $1\overset{1}{\smile}$ et *.ml.* 1, . *lg.* sera $1\overset{2}{\smile}$ du fait que *.m.l.* par *.l.g.* est autant que *.l.i.* par lui-même (l'angle en *.i.* étant droit). Le rectangle *.i.l.g.* vaudra un cube et le rectangle *.i.l.f.* vaudra $6\overset{1}{\smile}$ parce que *.i.l.* vaut $1\overset{1}{\smile}$ et *.l.f.* vaut 6. Le rectangle *.h.f.g.* vaudra 4 parce qu'il est égal au rectangle *.a.l.f.* qui valait 4. Comme *.i.l.g.* vaut en tout $6\overset{1}{\smile}$ et 4 et que par l'autre raisonnement il est prouvé être $1\overset{3}{\smile}$ alors, $1\overset{3}{\smile}$ sera égal à $6\overset{1}{\smile}$ *.p.* 4 et *.i.l.* vaudra$1\overset{1}{\smile}$. Selon le mode de résolution enseigné, *.l.i.* vaudra R.q.3 *p*. 1, *.l.g.* vaudra 4 *p*. Rq. 12 ; *.f.g.* vaudra R.q. 12 *m*. 2, le rectangle *.i.l.f.* vaudra R.q. 108 *p*. 6 parce que la ligne *.i.l.* vaut R.q. 3 *p*. 1 et *.l.f.* 6, le rectangle *.h.f.g.* vaut 4 qui joint avec R.q. 108 *p*. 6 fait R.q. 108 *p*. 10 qui est égal au cube *.i.l.g.* (comme il a été proposé).	**Démonstration de la résolution par les aires planes de l'équation $x^3 = Px + Q$** L'équation à résoudre est $x^3 = 6x + 4$. On définit une unité q qui aura pour valeur 1. Sur la demi-droite $[me[$ on place les points l tel que $ml = 1$ et f tel que $lf = 6$ (coefficient de l'inconnue). On construit le rectangle $lfba$ d'aire 4 ($la = fb = 4/lf$ et $ab = lf = 6$) ; son aire est égale à la constante de l'équation. On trace la demi-droite $[ad)$ contenant b et la demi-droite $[ar)$ contenant l. On utilise ensuite deux équerres : - la première d'angle droit en r (mobile) placé sur $[ar)$ de sorte que l'angle $\widehat{mrg}$ soit droit, g étant l'intersection de la perpendiculaire en r à (mr) avec $[lf)$, - la deuxième d'angle droit en p (mobile) placé sur $[ad)$ de sorte que l'angle $\widehat{bpg}$ soit droit. La position de r recherchée est celle qui entraîne l'alignement de r avec f et p. Cette position de r est notée i et celle de p est alors notée c. Bombelli affirme ensuite que li représente la valeur de l'inconnue que nous notons x.o (li) étant la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle rectangle mlg : $\dfrac{li}{lm} = \dfrac{lg}{li}$ soit $\dfrac{x}{1} = \dfrac{lg}{x}$ et donc lg sera x^2. L'aire du rectangle $ilgk$ sera $il \times lg = x \times x^2 = x^3$, celle du rectangle $ilfh$ sera $6x$ parce que il vaut x et lf vaut 6 et celle du rectangle $hfgk$ sera 4 parce qu'égale à l'aire du rectangle $alfb$ qui est 4. Le rectangle $ilgk$ les réunissant a pour aire $6x + 4$ et par l'autre raisonnement, elle a été démontrée valoir x^3 donc x^3 sera égal à $6x + 4$ et il vaudra x. Selon la méthode de résolution enseignée dans un autre chapitre, on a $li = \sqrt{3} + 1$, $lg = 4 + \sqrt{12}$, $fg = \sqrt{12} - 2$, l'aire du rectangle $ilfh$ vaudra $\sqrt{108} + 6$ parce que il vaut $\sqrt{3} + 1$ et lf vaut 6. L'aire du rectangle $hfgk$ vaut 4 qui ajouté à $\sqrt{108} + 6$ fait $\sqrt{108} + 10$, ce qui est égal au cube $ilgk$.

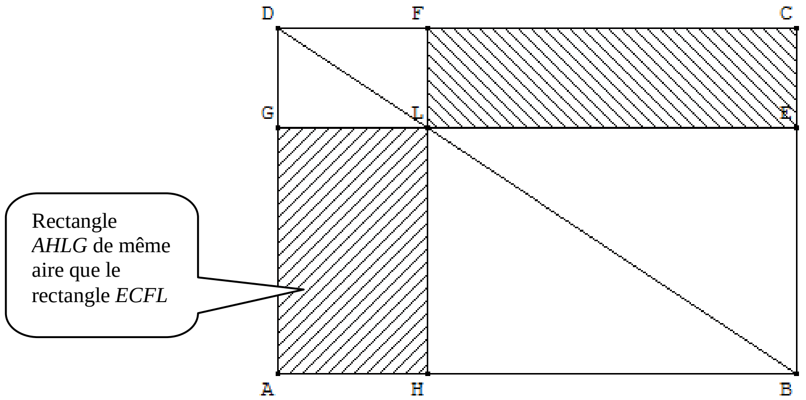
[1] *Algebra* livre 2, p 228, préface Bortolotti, éditeur Feltrinelli, Milan 1966.

[2] Par *Cube*, Bombelli désigne le cube de l'inconnue noté $\overset{3}{\smile}$. L'inconnue est désignée par *Tanto* (*Tanti* au pluriel) notée $\overset{1}{\smile}$.

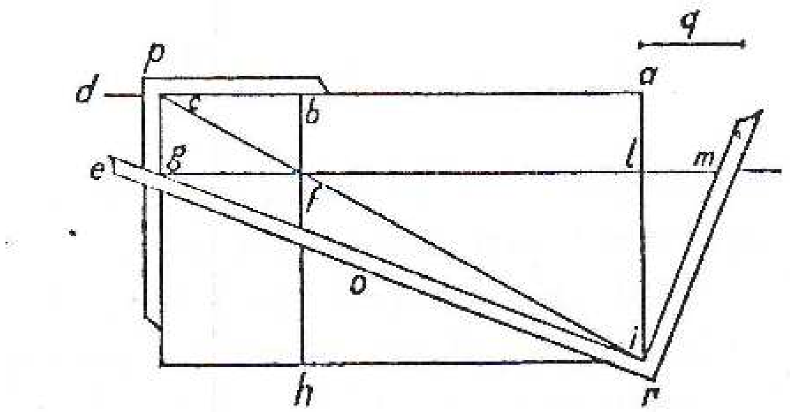
La résolution de Bombelli fait appel à deux équerres qui sont amenées à se chevaucher ainsi qu'une règle permettant de vérifier l'alignement des points. Ceci n'est guère réalisable d'une manière pratique, même en utilisant des matériaux très minces. Aujourd'hui nous disposons cependant de logiciels géométriques dynamiques nous permettant des réaliser la suggestion de Bombelli. C'est ce qui est réalisé un peu plus loin.

La proposition 43 du livre I des Éléments d'Euclide

Dans sa démonstration, Bombelli fait référence à la proposition 43 du livre I des Éléments d'Euclide : *Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux*[3].



Quelques explications sur la démonstration



On se réfère à la figure tracée ci-après avec Geoplan.

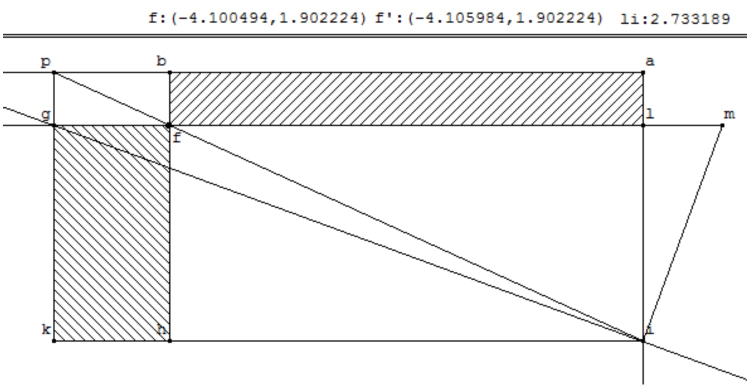
L'aire du rectangle *labf* vaut $\frac{4}{6} \times 6 = 4$. Si on admet que $li = 1\overset{1}{\cup}$, on a vu qu'alors $lg = 1\overset{2}{\cup}$ et donc que l'aire du rectangle de diagonale *gi* est $il \times lg = 1\overset{1}{\cup} \times 1\overset{2}{\cup} = 1\overset{3}{\cup}$. L'aire du rectangle de diagonale *if* est $lf \times il = 6\overset{1}{\cup}$. Comme l'aire du rectangle de diagonale *af* qui vaut 4 est égale à l'aire du rectangle de diagonale *gh* (Euclide proposition 53 L 1), l'aire de ce dernier est aussi 4. Le rectangle de diagonale *gi* étant la réunion des rectangles de diagonales respectives *gh* et *if*, son aire vaut $6\overset{1}{\cup} + 4$. On en conclut que $1\overset{3}{\cup} = 6\overset{1}{\cup} + 4$. La longueur *li* représente bien la solution de l'équation proposée.

3 Euclide d'Alexandrie, traduction et commentaires de Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France Paris 1990.

Tracé et résolution réalisés à l'aide de Géoplan

----- OBJETS CRÉÉS -----
m point libre
l image de m par la translation de vecteur $-\vec{i}$
f image de l par la translation de vecteur $-6\vec{i}$
a image de l par la translation de vecteur $\frac{4}{lf}\vec{j}$
(unité de longueur U_{oxy})
b image de f par la translation de vecteur $\frac{4}{lf}\vec{j}$
(unité de longueur U_{oxy})
Demi-droite [al)
Demi-droite [mf)
Demi-droite [ab)
r point libre sur la demi-droite [al)
Segment [mr]
P_1 droite perpendiculaire à (mr) passant par r
g point d'intersection des droites P_1 et (ml)
p projeté orthogonal de g sur (ab)
k image de g par la translation de vecteur $\vec{lr}$
h image de f par la translation de vecteur $\vec{lr}$
Segment [pg]
Segment [gk]
Segment [bf]
Segment [fh]
Segment [kr]
Segment [pr]
f' point d'intersection des droites (pr) et (ml)
S_1 polygone bfla
S_2 polygone gfhk
----- AFFICHAGES -----
A_{f0} affichage des coordonnées du point f (repère R_{oxy}) (6 décimales)
A_{f1} affichage des coordonnées du point f' (repère R_{oxy}) (6 décimales)
A_{f2} affichage de la longueur du segment [lr] (unité de longueur U_{oxy})
(6 décimales)

Il va de soit qu'excepté des cas particuliers, les équations du troisième degré n'étant pas résolubles à la règle et au compas, il n'est pas possible, même par cette méthode de trouver des solutions théoriquement exactes. En effet, l'approximation vient du fait que l'alignement des points *p*, *f* et *i* ou encore la coïncidence de *f'* (intersection de (*ip*) et (*mg*)) avec *f* est réalisé par glissement. Ainsi, en ayant agrandi la figure au maximum afin d'avoir une coïncidence optimale de *f'* et *f*, on obtient le résultat ci-dessous : *li* = 2,733 alors que $\sqrt{3}+1$ a pour valeur approchée 2,732.



Les méthodes de résolution exactes de Bombelli

Bombelli donne une des solutions exactes, $\sqrt{3}+1$. C'est en fait l'unique solution positive de l'équation, donc pouvant être associée à une longueur, alors que les autres solutions sont $1-\sqrt{3}$ et -2.

Pour la solution $\sqrt{3}+1$, Bombelli dit qu'elle est obtenue suivant une méthode précédemment explicitée. Il sait résoudre les équations du $3^{ème}$ degré y compris en passant par l'intermédiaire des nombres complexes, il en est l'inventeur. Cependant, il ne précise pas laquelle des méthodes il utilise dans ce cas précis.

Il en a développé trois dans des paragraphes précédents, les voici :

Première méthode

Si[4] on veut résoudre le cube égal à l'inconnue et au nombre [$x^3 = Px + Q$][5], on prend le tiers du coefficient de l'inconnue [$\frac{P}{3}$] qu'on élève au cube [$(\frac{P}{3})^3$] qui est retranché du carré de la moitié du nombre [$\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3$] puis on ajoute ou on retranche sa racine carrée [$\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}$] à la moitié du nombre [$\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}$ et $\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}$]. On prend la racine cubique de cette somme et de cette différence et ces deux racines jointes ensemble [$\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}}$] sont la valeur de l'inconnue (comme on le verra dans les exemples donnés ci-après).

Pour résoudre[6] $1\overset{3}{\smile}$ égal à $6\overset{1}{\smile} + 40$, on prend le tiers de l'inconnue, c'est 2 dont le cube fait 8. De ceci on retire le carré de la moitié du nombre, qui est 400, il reste 392 et de ceci on prend la racine carrée qui est R.q. 392 [$\sqrt{392}$] et elle s'ajoute à la moitié du nombre, cela fera 20 + R.q. 392 [20 + $\sqrt{392}$] et la racine cubique de ce binôme ajoutée à la racine cubique de son conjugué, c'est à dire avec R.c.⌞ 20 – R.q. 392 ⌟ [$\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$]. Ces deux racines cubiques sont 2 + R.q. 2 [2 + $\sqrt{2}$] pour l'une et 2 – R.q. 2 [2 – $\sqrt{2}$] pour l'autre. Ajoutées ensemble elles donnent 4 et 4 est la valeur de l'inconnue.

Deuxième méthode

Pour la résolution[7] de $1\overset{3}{\smile}$ égal à $12\overset{1}{\smile} + 9$, Bombelli indique que la résolution ne peut être réalisée par la méthode indiquée précédemment parce que le cube du tiers du coefficient de l'inconnue est supérieur au carré de la moitié du nombre. Dans ce cas, il propose, selon la règle indiquée par Cardan[8], d'ajouter ou retrancher un nombre cube à chaque membre de sorte qu'on parvienne à une simplification faisant baisser le degré de l'équation (en fait, cela revient à trouver une racine évidente, ce qui est rarement possible). Ainsi pour $1\overset{3}{\smile}$ égal à $12\overset{1}{\smile} + 9$, il propose d'ajouter 27, ce qui le conduit à $1\overset{3}{\smile} + 3^3$ égal à $12\overset{1}{\smile} + 36$, soit encore $1\overset{3}{\smile} + 3^3$ égal à 12 $(1\overset{1}{\smile} + 3)$. En divisant chaque membre par $(1\overset{1}{\smile} + 3)$, il parvient à $1\overset{2}{\smile} - 3\overset{1}{\smile} + 9$ égal à 12 soit[9], $1\overset{2}{\smile} = 3\overset{1}{\smile} + 3$ dont la résolution donne R.q. $5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$ [$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$].

Troisième méthode

Bombelli propose enfin ceci : on peut encore procéder à la résolution de ce type d'équation de la manière qui suit. Pour résoudre[10] $1\overset{3}{\smile}$ égal à $15\overset{1}{\smile} + 4$, on prend le tiers de l'inconnue, c'est 5. Son cube fait 125 et on le retranche du carré de la moitié du nombre qui est 4, il reste – 121 dont la R.q. sera *piu di meno* 11 [$11i$] qui ajoutée à la moitié du nombre fait 2 *piu di meno* 11 [$2 + 11i$], dont la racine cubique et celle de son conjugué font 2 *piu di meno* 1 [$2 + i$] et 2 *meno di meno* 1 [$2 – i$] qui ajoutés ensemble font 4 et 4 est la valeur de l'inconnue. Pour cette équation, on a $\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3 = -121$ qui, bien que du même type que l'équation qui va suivre est

---

[4] Page 222 « $x^3 = 6x + 40$ ». Cette équation est traitée par Cardan dans son *Ars Magna* au chapitre XII. Il s'arrête aux écritures $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ et $\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

[5] Les notations entre crochets ne figurent pas dans le texte.

[6] Page 229 « $x^3 = 12x + 9$ ».

[7] P 224, équation $x^3 = 12x + 9$.

[8] Cardan, *Ars Magna*, chapitre XXV « À propos des règles imparfaites et particulières ». Il prend l'exemple de résolution rédigé sous une forme actuelle $x^3 = 16x + 21$ qui donne $x^3 + 27 = 16x + 48$ puis $x^2 = 3x + 7$ par simplification par $x + 3$.

[9] $x^2 = 3x + 3$ dont la solution positive est 1,5 + $\sqrt{5{,}25}$.

[10] $x^3 = 15x + 4$.

traitée différemment car Bombelli sait déterminer des nombres dont le cube est $2 + \sqrt{121}\, i$ par des méthodes d'encadrement « à tâtons ». Sa méthode, *Manière de trouver la racine cubique de semblable types d'expressions*[11], est basée sur le fait que de $a + bi = (x + yi)^3$ on déduit que $x^2 + y^2 = \sqrt[3]{a^2+b^2}$ et $x^3 - 3xy^2 = a$. Il s'agit alors de trouver les nombres x et y répondant à ces contraintes. En particulier on doit avoir $x^2 > \sqrt[3]{a^2+b^2}$ et $x^3 < a$. Pour $2 + \sqrt{121}\, i$, on a $2^2 + (\sqrt{121})^2 = 125 = 5^3$. On cherche donc x et y répondant aux conditions citées. Bombelli, après avoir vérifié que $x = 1$ et $x = 3$ ne conviennent pas, en déduit que s'il existe une solution entière, ce ne peut être que 2 … qui convient et conduit à la solution $2 + i$ qui est toujours accompagnée de son conjugué $2 - i$ et $(2 + i) + (2 - i) = 4$.

Pour l'équation $x^3 = 12x + 9$ vue en deuxième méthode, on a $\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3 = -\frac{175}{4}$ qui n'est le carré d'aucun réel, ce qui justifie que Bombelli n'applique pas la première méthode. Il lui faut déterminer des nombres dont le cube est $\frac{9}{2} + i\sqrt{\frac{175}{4}}$, ce qu'il ne sait pas faire avec de tel nombres.

La résolution de l'équation $x^3 = 6x + 4$

Par la méthode de Cardan et Tartaglia (ou par application de formules), avec $x = u + v$, l'équation $x^3 = 6x + 4$ devient $(u + v)^3 = 6(u + v) + 4$ soit $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 6(u + v) + 4$. En fixant $uv = 2$ on déduit que $u^3v^3 = 8$ et $u^3 + v^3 = 4$. Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2 - 4X + 8 = 0$. Cette équation de discriminant -16 a pour solutions $2 + 2i$ et $2 - 2i$, solutions que Bombelli écrivait 2 *piu di meno* 1 et 2 *meno di meno* 2. Il s'agit alors de trouver des complexes dont le cube est égal à ces nombres. Pour $2 + 2i$, on a $\sqrt[3]{a^2+b^2} = 2$ et $a = 2$, donc le carré de x doit être inférieur à 2 et son cube supérieur à 2. Il n'y a pas de nombre simple répondant à cette condition. La méthode « à tâtons » ne fonctionne pas.

Dans ce cas, on peut supposer que Bombelli utilise la deuxième méthode, tout en se disant que cette équation n'a pas été choisie au hasard, mais pour son adaptation à cette méthode sans doute par une création à rebours : $x^3 = 6x + 4$ donne $x^3 + 2^3 = 6x + 4 + 8$ soit $x^3 + 2^3 = 6(x + 2)$. Ayant $x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, la simplification par $x + 2$ conduit à l'équation $x^2 = 2x + 2$ dont les solutions sont $1 + \sqrt{3}$, qui est positive et peut être retenue par Bombelli, et $1 - \sqrt{3}$ qui est négative.

Méthode actuelle

On a $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et il s'en déduit 3 nombres complexes dont le cube est égal à $2 + 2i$, ce sont :

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i\right);$$

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = -1 + i\,;$$

$$\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\, i\right).$$

Les conjugués sont aussi solutions : $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i\right)$, $\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\, i\right)$ et $-1 - i$.

Il y a 9 combinaisons possibles de ces valeurs, mais la condition $uv = 2$ contraint à une association des valeurs possibles de u et de v donnant seulement 3 solutions qui sont :

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i\right) = \sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} =$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}\,;$$

$$(-1 + i) + (-1 - i) = -2\,;$$

[11] *Algebra* Livre 1 page 140 et suivantes.

$\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\,i) + \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\,i) = \sqrt{2}\,\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} =$ $\sqrt{1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 1 - \sqrt{3}$.

La méthode fonctionne bien parce qu'elle conduit à des arcs multiples de $\frac{\pi}{12}$ dont les lignes trigonométriques exactes sont connues.

Gérard HAMON
12/11/11