Analyse 4

24h CM – 24h TD - 5 ECTS (amphi + TD)

48 h étudiant + 10h FOAD

Prérequis

Généralités.. h

Équations différentielles linéaires, problème de Cauchy

Solutions d'une équation différentielle linéaire.. h

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution

Cas des équations linéaires d'ordre n

Cas des équations homogènes

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.............................. h

Traduction matricielle

Méthode de variation des constantes.. h

Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus

Cas particuliers des systèmes différentiels à coefficients constants

Équations différentielles scalaires du second ordre.. h

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires d'ordre 2.

Notion de wronskien.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiant.e.s : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiant.e.s. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », l'enseignant.e est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de **R**, E un espace normé de dimension finie.

Équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Équation différentielle linéaire : $x' = a(t)(x)+b(t)$ où a est une application continue de I dans L(E) et b une application continue de I dans E	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.
	Principe de superposition.
Problème de Cauchy.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.	
Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	
Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration non exigible. Méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4
Cas des équations scalaires d'ordre n.	
Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $F(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \to x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E.	
Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.	
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	
Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $x'=a(x)$, $x(t_0)=x_0$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leq 3$.
Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Équations différentielles scalaires du second ordre	
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.	

Contenus	Capacités & commentaires
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.	Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.